Végeselem analízis

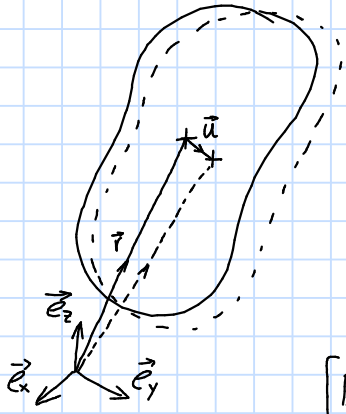
1. Rugalmasságtani peremérték feladat

1.1. Kinematikai egyenlet

Elmozdulás mező:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x,y,z) = u(x,y,z)\vec{e}_x + v(x,y,z)\vec{e}_y + w(x,y,z)\vec{e}_z$$

Feltételezés: az elmozdulások és alakváltozások kicsik ($\varepsilon \approx 10^{-3}, \gamma \approx 10^{-3}$ vagy kisebb)



Derivált tenzor

$$\underline{\underline{D}} = \vec{u} \circ \nabla =$$

$$= (u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z) \circ \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

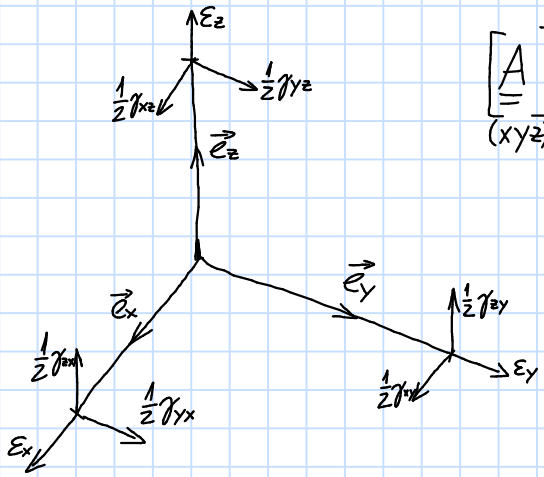
$$\left[\underline{\underline{D}}\right]_{(xyz)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Alakváltozási tenzor

$$\underline{\underline{D}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}}^T)}_{\underline{\underline{A}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}^T)}_{\underline{\underline{\Psi}}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})}$$ (szimmetrikus tenzor) $(\vec{r} \in V)$

Megj.: $(\vec{a} \circ \vec{b})^T = (\vec{b} \circ \vec{a})$



$$\underset{(xyz)}{\left[\underline{\underline{A}}\right]} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Skalár egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

6 darab skalár egyenlet

9 darab ismeretlen függvény

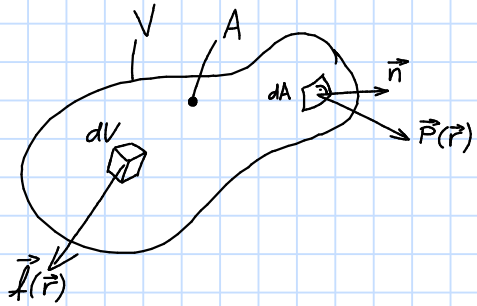
Kompatibilitási egyenlet:

$$\nabla\times / \quad \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}(\vec{u}\circ\nabla + \nabla\circ\vec{u}) \quad / \times\nabla$$

$$\nabla\times\underline{\underline{A}}\times\nabla = \frac{1}{2}\left(\nabla\times\vec{u}\circ\underbrace{\nabla\times\nabla}_{\vec{0}} + \underbrace{\nabla\times\nabla}_{\vec{0}}\circ\vec{u}\times\nabla\right) = \underline{\underline{0}}$$

$$\boxed{\nabla\times\underline{\underline{A}}\times\nabla = \underline{\underline{0}}}$$

1.2. Egyensúlyi egyenlet



$\vec{f}(\vec{r})$ - egységnyi térfogatra jutó erő $[N/m^3]$

$\vec{p}(\vec{r})$ - egységnyi felületre jutó erő $[N/m^2]$

$\vec{n}$ - normál vektor

V - a test térfogata

A - a test felülete

Egyensúly az erők szempontjából

$$\vec{F} = \int_{(V)} \vec{f}(\vec{r})\,dV + \int_{(A)} \vec{p}(\vec{r})\,dA = \vec{0}$$ (integrál vagy globális alak)

$$\boxed{\underline{\underline{F}}(\vec{r})\cdot\nabla + \vec{f}(\vec{r}) = \vec{0}}$$ (differenciális vagy lokális alak) $(\vec{r}\in V)$

skalár egyenletek

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0\\
\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0\\
\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + f_z = 0
\end{aligned}\right\}$$ 3 darab skalár egyenlet, 9 darab (újabb) ismeretlen

Egyensúly a nyomatékok szempontjából

$$\vec{M}_A = \int_{(V)} \vec{r}\times\vec{f}(\vec{r})\,dV + \int_{(A)} \vec{r}\times\vec{p}(\vec{r})\,dA = \vec{0}$$ (integrál vagy globális alak)

$$\boxed{\underline{\underline{F}}(\vec{r}) = \underline{\underline{F}}^T(\vec{r})}$$ (differenciális vagy lokális alak) $(\vec{r}\in V)$

skalár egyenletek

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

3 db skalár egyenlet (nincs újabb ismeretlen)

1.3. Anyagegyenlet

Feltételezések:

- csak kis alakváltozások lépnek fel
- az anyag lineárisan rugalmasan viselkedik
- az anyag izotrop tulajdonságú

} Hooke-törvény

$$\boxed{\underline{\underline{F}}(\vec{r}) = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{A}}(\vec{r}) + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I(\vec{r})\,\underline{\underline{I}}\right)} \qquad (\vec{r} \in V)$$

ahol $A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ az $\underline{\underline{A}}$ első skalárinvariánsa

$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ az egységtenzor

E - rugalmassági modulusz

ν - Poisson-tényező

Skalár egyenletek:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx}$$

} 6 darab skalár egyenlet

nincs újabb ismeretlen

1.5. Peremérték feladat

18 darab skalár egyenlet

18 darab ismeretlen függvény:

$u(x,y,z)$ $v(x,y,z)$ $w(x,y,z)$

$\varepsilon_x(x,y,z)$ $\varepsilon_y(x,y,z)$ $\varepsilon_z(x,y,z)$

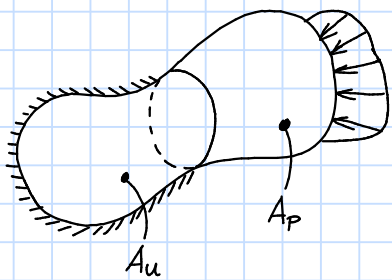
$\gamma_{xy}(x,y,z)$ $\gamma_{yz}(x,y,z)$ $\gamma_{zx}(x,y,z)$

$\sigma_x(x,y,z)$ $\sigma_y(x,y,z)$ $\sigma_z(x,y,z)$

$\tau_{xy}(x,y,z)$ $\tau_{yz}(x,y,z)$ $\tau_{zx}(x,y,z)$

$\tau_{yx}(x,y,z)$ $\tau_{zy}(x,y,z)$ $\tau_{xz}(x,y,z)$

Peremfeltételek



$$A_u \cup A_p = A$$

$$A_u \cap A_p = \emptyset$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}_0(\vec{r}) && \vec{r} \in A_u \\ &\underline{\underline{F}}(\vec{r}) \cdot \vec{n} = \vec{p}(\vec{r}) && \vec{r} \in A_p \end{aligned}}$$

Probléma: a peremérték feladat elvileg megoldható, viszont eddig senkinek sem sikerült megtalálnia az egzakt megoldást. Ezért közelítő megoldási módszereket kell keresnünk.

2. A mechanika energia elvei

2.1. Alapfogalmak

Kinematikailag lehetséges elmozdulásmező: egy olyan függvény, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik

- folytonos függvény
- elegendően sokszor deriválható
- kielégíti a kinematikai peremfeltételeket

Jele: $\vec{u}^*(\vec{r})$

$$\vec{u}^*(\vec{r}) = \vec{u}_0(\vec{r}) \qquad \vec{r} \in A_u$$

Kinematikailag lehetséges alakváltozás mező

$$\underline{\underline{A}}^* = \frac{1}{2}(\vec{u}^* \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}^*)$$

Kinematikailag lehetséges feszültség mező

$$\underline{\underline{F}}^* = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{A}}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I^* \underline{\underline{I}}\right)$$

A kinematikailag lehetséges feszültség mező nem feltétlenül elégíti ki az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt.

$$\underline{\underline{F}}^* \cdot \nabla + \vec{f} \neq \vec{0} \qquad \vec{r} \in V$$

$$\underline{\underline{F}}^* \cdot \vec{n} \neq \vec{p} \qquad \vec{r} \in A_p$$

Virtuális elmozdulásmező

Def.: $\delta\vec{u} = \vec{u}_1^* - \vec{u}_2^*$ $\quad (= \delta u\,\vec{e}_x + \delta v\,\vec{e}_y + \delta w\,\vec{e}_z)$

Tulajdonságai:

- folytonos függvény
- elegendően sokszor deriválható
- a kinematikai peremen az értéke nulla

Virtuális alakváltozás mező

$$\delta \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\delta\vec{u}\circ\nabla + \nabla\circ\delta\vec{u}\right)$$

$$\left[\delta \underline{\underline{A}}\right]_{(xyz)} = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_x & \frac{1}{2}\delta\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\delta\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\delta\gamma_{yx} & \delta\varepsilon_y & \frac{1}{2}\delta\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\delta\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\delta\gamma_{zy} & \delta\varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Statikailag lehetséges feszültség mező: egy olyan

függvény, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- kielégíti az egyensúlyi egyenletet
- kielégíti a dinamikai peremfeltételt.

Jele: $\underline{\underline{F}}$

$$\underline{\underline{F}}\cdot\nabla + \vec{f} = \vec{0} \qquad \vec{r}\in V$$

$$\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n} = \vec{p} \qquad \vec{r}\in A_p$$

Statikailag lehetséges alakváltozás mező

$$\underline{\underline{\bar{A}}} = \frac{1+\nu}{E}\left(\underline{\underline{\bar{F}}} - \frac{\nu}{1+\nu}\bar{F}_I\,\underline{\underline{I}}\right)$$

A statikailag lehetséges alakváltozás mező nem feltétlenül elégíti ki a kompatibilitási egyenletet.

$$\nabla \times \underline{\underline{\bar{A}}} \times \nabla \neq \underline{\underline{0}}$$

A statikailag lehetséges alakváltozási mezőből számitott statikailag lehetséges elmozdulás mező nem feltétlenül elégíti ki a kinematikai peremfeltételt

$$\vec{\bar{u}}(\vec{r}) \neq \vec{u}_0(\vec{r}) \qquad \vec{r} \in A_u$$

Elmozdulás módszer: a rugalmasságtani peremérték feladat elsődleges ismeretlene a kinematikailag lehetséges elmozdulás mező.

Erő módszer: a rugalmasságtani peremérték feladat elsődleges ismeretlene a statikailag lehetséges feszültség mező.

2.2. Virtuális munka elve

$$\underline{\underline{F}}\cdot\nabla+\vec{f}=\vec{0} \qquad /\cdot\vec{u}^* \qquad /\int_{(V)}\cdots dV$$

$$\int_{(V)}\vec{u}^*\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\nabla dV+\int_{(V)}\vec{u}^*\cdot\vec{f}dV=0$$

$$\vec{u}^*\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\nabla=\overline{\vec{u}^*\cdot\underline{\underline{F}}}\cdot\nabla-\vec{u}^*\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\nabla$$

$$\underbrace{\int_{(V)}\overline{\vec{u}^*\cdot\underline{\underline{F}}}\cdot\nabla dV}_{\substack{\text{Gauss-tétel}\\ \int_{(A)}\vec{u}^*\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}dA}}-\int_{(V)}\underbrace{\vec{u}^*\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\nabla}_{\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underbrace{\vec{u}^*\circ\nabla}_{\underline{\underline{D}}}}dV+\int_{(V)}\vec{u}^*\cdot\vec{f}dV=0$$

Megj.: $\vec{a}\cdot\underline{\underline{B}}\cdot\vec{c}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_i\underline{\underline{B}}_{ij}c_j=$
$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}B_{ij}(a_ic_j)=\underline{\underline{B}}\cdot\cdot(\vec{a}\circ\vec{c})$

$$\underline{\underline{D}}^*=\underbrace{\underline{\underline{A}}^*}_{\text{szimm.}}+\underbrace{\underline{\underline{\Psi}}^*}_{\text{ferd. szimm.}} \Rightarrow \underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{D}}^*=\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}^*+\underbrace{\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{\Psi}}^*}_{0}$$

$$\int_{(V)}\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}^*dV-\int_{(A)}\vec{u}^*\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}dA-\int_{(V)}\vec{u}^*\cdot\vec{f}dV=0$$

2.3. Virtuális elmozdulás elve

$$\left.\begin{aligned}&\int_{(V)}\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}_1^*dV-\int_{(A)}\vec{u}_1^*\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}dA-\int_{(V)}\vec{u}_1^*\cdot\vec{f}dV=0\\&\int_{(V)}\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}_2^*dV-\int_{(A)}\vec{u}_2^*\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}dA-\int_{(V)}\vec{u}_2^*\cdot\vec{f}dV=0\end{aligned}\right\}\ \ominus$$

$$\int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underbrace{(\underline{\underline{A}}_1^* - \underline{\underline{A}}_2^*)}_{\delta \underline{\underline{A}}} dV - \int_{(A_p)} \underbrace{(\vec{u}_1^* - \vec{u}_2^*)}_{\delta \vec{u}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}}_{\vec{p}} dA + \int_{(A_u)} \underbrace{(\vec{u}_1^* - \vec{u}_2^*)}_{\delta \vec{u} = \vec{o}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} dA - \int_{(V)} \underbrace{(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)}_{\delta \vec{u}} \cdot \vec{f} dV = 0$$

ahol $\underline{\underline{A}}_1^* - \underline{\underline{A}}_2^* = \frac{1}{2}(\vec{u}_1^* \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}_1^*) - \frac{1}{2}(\vec{u}_2^* \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}_2^*) =$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(u_1^* - u_2^*)}_{\delta \vec{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \underbrace{(\vec{u}_1^* - \vec{u}_2^*)}_{\delta \vec{u}}\Big) = \delta \underline{\underline{A}}$$

A rugalmasságtani peremérték feladat <u>gyenge alakja</u>:

$$\boxed{\int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \delta \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \delta \vec{u} \cdot \vec{p} dA - \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \vec{f} dV = 0}$$

3. Végeselem módszer

Matematikából ismert:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

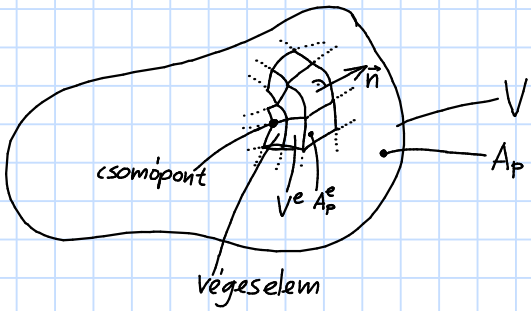
vagy

$$\int_{(V)} f(x,y,z)dV = \int_{(V_1)} f(x,y,z)dV + \int_{(V_2)} f(x,y,z)dV$$

ahol $V = V_1 \cup V_2$
és $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Ehhez hasonlóan

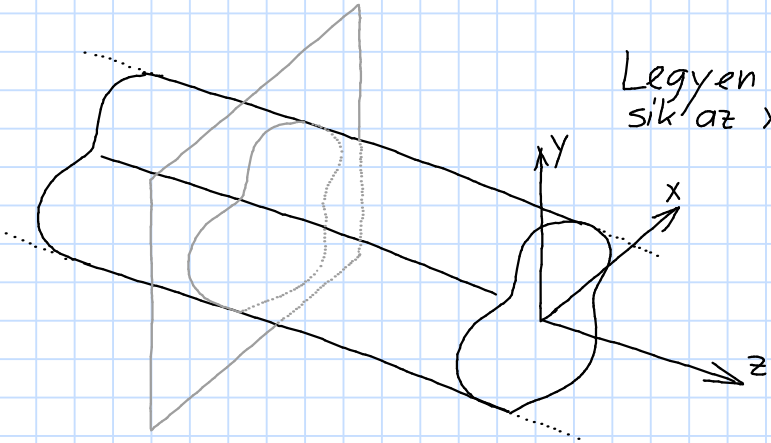
$$\int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \delta \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p)} \delta \vec{u} \cdot \vec{p} dA - \int_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \vec{f} dV = \sum_{e=1}^{n} \left[\int_{(V^e)} \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \delta \underline{\underline{A}} dV - \int_{(A_p^e)} \delta \vec{u} \cdot \vec{p} dA - \int_{(V^e)} \delta \vec{u} \cdot \vec{f} dV \right] = 0$$



3.1 Mechanikai modellek

3.1.1. Síkalakváltozás feladat

Def.: A vizsgált testnek van egy kitüntetett síkja, amely síkkal párhuzamos összes síkban azonos az alakváltozás, és ezen síkok távolsága terhelés hatására sem változik meg.



Legyen a kitüntetett sík az xy sík.

Következmények:

- az elmozdulás koordináták nem függnek a z koordinátától. $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $w = w(x,y)$
- z irányban a pontok nem mozdulnak el. $w = 0$

Vagyis

$$\boxed{\vec{u}(x,y) = u(x,y)\vec{e}_x + v(x,y)\vec{e}_y}$$

kinematikai egyenlet:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \underbrace{\frac{\partial v(x,y)}{\partial z}}_{0} + 0 = 0$$

$$\varepsilon_z = 0 \qquad \gamma_{zx} = 0 + \underbrace{\frac{\partial u(x,y)}{\partial z}}_{0} = 0$$

Alakváltozási tenzor:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(x,y) \qquad \boxed{\left[\underline{\underline{A}}\right]_{(xyz)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Feszültség tenzor:

$$\underline{\underline{F}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \underline{\underline{I}}\right) \Rightarrow \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}(x,y)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right)\\
\sigma_y &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right)\\
\sigma_z &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right)\\
\tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{2}\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\underset{(xyz)}{\left[\underline{\underline{F}}\right]} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right)\\
\sigma_y &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right)
\end{aligned}\right\} \oplus$$

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left((\varepsilon_x+\varepsilon_y) + \frac{2\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right) = \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) =$$

$$\frac{E}{1+\nu}\frac{\nu}{1-2\nu}\underbrace{\frac{1}{\nu}}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) = \frac{1}{\nu}\sigma_z$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x+\sigma_y)$$

A σ_z nem független a többi feszültség koordinátától.

Ezt szem előtt tartva vezessünk be új jelöléseket:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underset{(3\times1)}{\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}} \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \underset{(3\times1)}{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}} \qquad \delta\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Így $\underline{\underline{F}} \cdot\cdot\, \delta\underline{\underline{A}} = \sigma_x\,\delta\varepsilon_x + \sigma_y\,\delta\varepsilon_y + \tau_{xy}\,\delta\gamma_{xy} = \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^T\underline{\underline{\sigma}}$

ahol $\delta\varepsilon_x = \frac{\partial\delta u}{\partial x}$, $\delta\varepsilon_y = \frac{\partial\delta v}{\partial y}$ és $\delta\gamma_{xy} = \frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}$ mennyiségek

a $\delta\underline{\underline{A}}$ virtuális alakváltozás tenzor elemei.

A Hooke-törvény skalár egyenleteit mátrixok segítségével tömörebb formában írhatjuk:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}\ (3\times 1)} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}\ (3\times 3)}\underbrace{\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}\ (3\times 1)}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(x,y) = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(x,y)}$$

Újabb jelölések:

$$\underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}, \quad \delta\underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\end{bmatrix} \quad \underline{\underline{p}}_0 = \begin{bmatrix}p_x\\ p_y\end{bmatrix} \quad \underline{\underline{f}}_0 = \begin{bmatrix}f_x\\ f_y\end{bmatrix}$$

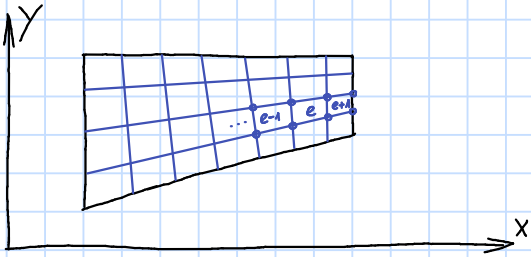
Feltételeztük, hogy $\vec{p}(x,y) = p_x(x,y)\,\vec{e}_x + p_y(x,y)\,\vec{e}_y$

és $\vec{f}(x,y) = f_x(x,y)\,\vec{e}_x + f_y(x,y)\,\vec{e}_y$

A gyenge alak mátrixok segítségével is felírható

$$\int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot\cdot\, \delta\underline{\underline{A}}\, dV - \int_{(A_p)} \delta\vec{u}\cdot\vec{p}\, dA - \int_{(V)} \delta\vec{u}\cdot\vec{f}\, dV = \int_{(V)} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}}\, dV - \int_{(A_p)} \delta\underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}}_0\, dA - \int_{(V)} \delta\underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{f}}_0 = 0$$

Végeselemes diszkretizáció



$$\int_{(V)} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\sigma}}\, dV - \int_{(A_p)} \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{p}}_0\, dA - \int_{(V)} \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{f}}_0\, dV =$$

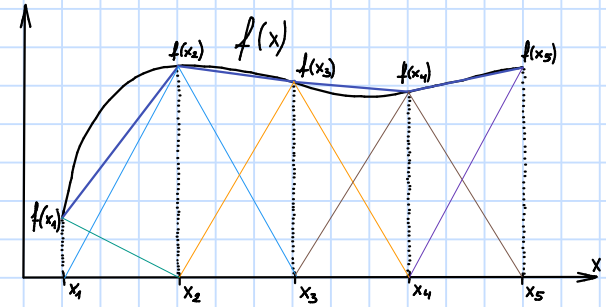
$$\boxed{\sum_{e=1}^{n} \left[\int_{(V^e)} (\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T \underline{\underline{\sigma}}^e\, dV - \int_{(A_p^e)} (\delta \underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}_0\, dA - \int_{(V^e)} (\delta \underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{f}}_0\, dV \right] = 0}$$

$$\left(\text{de} \quad \left[\int_{(V^e)} (\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T \underline{\underline{\sigma}}^e\, dV - \int_{(A_p^e)} (\delta \underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{p}}_0\, dA - \int_{(V^e)} (\delta \underline{\underline{u}}^e)^T \underline{\underline{f}}_0\, dV \right] \neq 0 \quad ! \right)$$

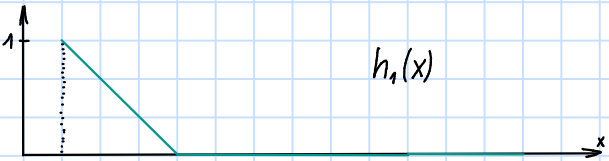
Hogyan közelíthető az elmozdulásmező egy végeselemen?

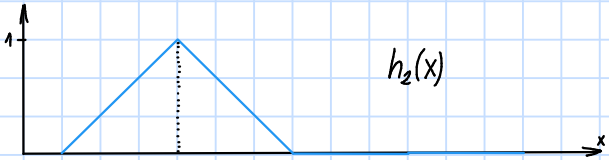
Kitérő (ötlet gyűjtés)

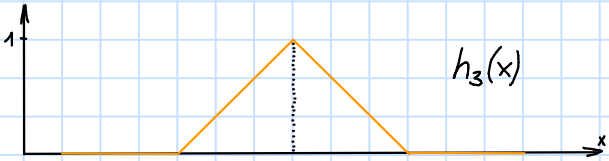
Hogyan közelítenénk egy függvényt szakaszonként lineáris függvénnyel?

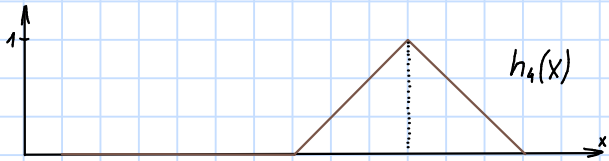


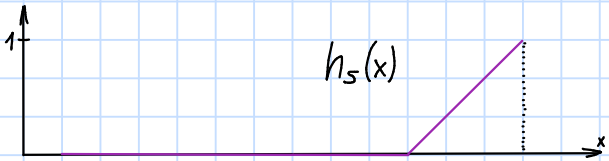
$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{5} h_i(x)\, f(x_i)$$





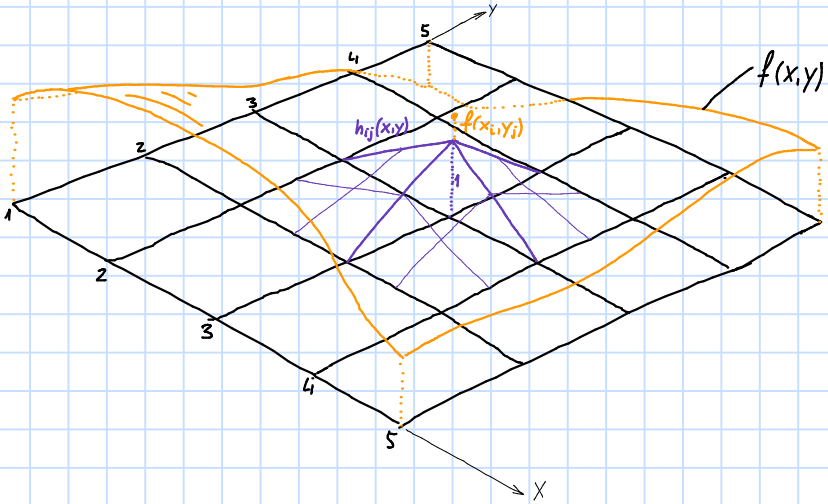






Ennek mintájára tudunk közeliteni egy kétváltozós függvényt is.

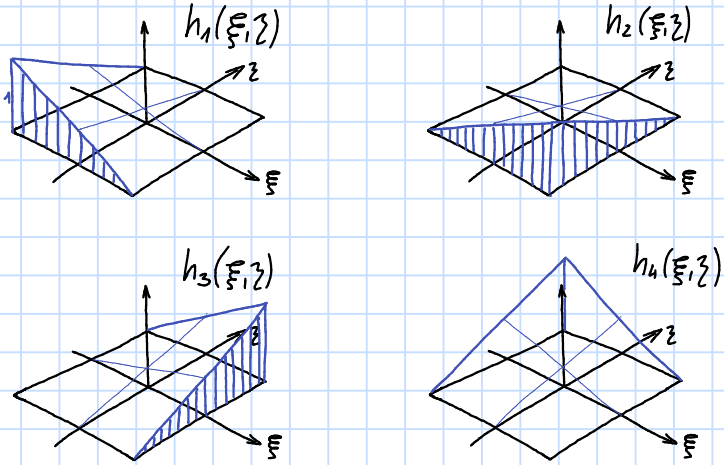
$$f(x,y) \approx \sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{5} h_{ij}(x,y)\, f(x_i, y_j)$$



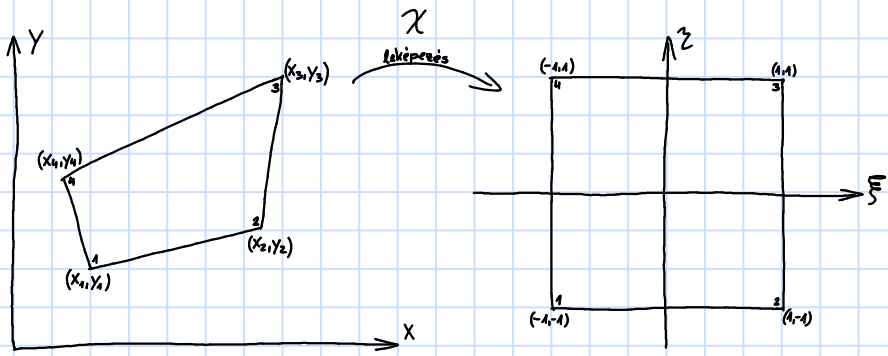
Az ábrán bejelölt $h_{ij}(x,y)$ függvény x irányban az i-edik, y irányban a j-edik csomóponthoz tartozik. Mindegyik csomóponthoz hozzárendelhető egy hasonló függvény.

A végeselem módszerben annál jobb közelitő megoldást kapunk, minél jobb, a megoldáshoz illeszkedő közelitő függvényt alkalmazunk. Az ábrákon látható 1D-s és 2D-s szakaszonként lineáris függvények nem a legjobbak, de könnyen kezelhetőek.

A $h_{ij}(x,y)$ függvény képletét nem tudjuk leírni a törésponok miatt. Célszerűbb inkább az egyes négyszög tartományokon előforduló függvényekkel foglalkozni. Belátható, hogy mindegyik négyszög tartományon előfordul az alábbi négy függvényhez hasonló függvény.



Belátható, hogy ezt a négy függvényt egymás mellé téve a $h_{ij}(x,y)$ függvényhez hasonló alakot kapunk. Ahhoz, hogy ezeket a $h_i(\xi,\zeta)$ függvényeket használjuk a végeselem számításhoz, le kell tudnunk képezni őket tetszőleges négyszög tartományra.



Később részletezésre kerülő okok miatt célszerű a $h_i(\xi,\zeta)$ függvények értelmezési tartományát -1 és 1 közé választani. ($-1 \leq \xi \leq 1$ és $-1 \leq \zeta \leq 1$).

Nevezzük el az xy koordinátarendszert globális-, a $\xi\zeta$-t pedig lokális koordinátarendszernek.

Behelyettesítéssel könnyen igazolható, hogy a $h_i(\xi,\zeta)$ függvények alakja a következő:

$$h_1(\xi,\zeta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\zeta), \qquad h_2(\xi,\zeta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\zeta),$$

$$h_3(\xi,\zeta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\zeta), \qquad h_4(\xi,\zeta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\zeta)$$

(lásd: előző oldal ábrai)

Az 1,2,3,4 csúcsok ξ,ζ koordinátáit behelyettesítve szintén belátható, hogy

$$\left.\boxed{\begin{aligned} x(\xi,\zeta)&=\sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\zeta)\,x_i \\ y(\xi,\zeta)&=\sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\zeta)\,y_i \end{aligned}}\right\}$$

Ez adja meg a fent ábrán látható χ leképezést

Ha egy kétváltozós függvény közelítésénél felhasználjuk az összes $h_{ij}(x,y)$ függvényt, az egyenértékű azzal, mintha mindegyik tartományon felhasználtuk volna az összes $h_i(\xi,\eta)$ függvényt.

Nevezzük ezentúl az xy sík négyszög tartományait végeselemeknek, a tartományok sarokpontjait pedig csomóponoknak.

Izoparametrikusnak nevezünk egy végeselemet, ha a geometriájának leképezése, és az ismeretlen mező (esetünkben az u és v) közelítése ugyan azokkal a függvényekkel történik (pl.: $h_i(\xi,\eta)$ $i=1,\dots,4$).

Legyen a közelítendő függvény egy végeselemen az u^e és v^e elmozdulás koordináta.

$$\boxed{\begin{aligned} u^e(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\, u_i^e \\ v^e(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{4} h_i(\xi,\eta)\, v_i^e \end{aligned}}$$

ahol u_i^e és v_i^e az e-edik végeselem i-edik csomópontjában lévő elmozdulás értékeket jelentik.

Ezt az összefüggést le lehet írni tömörebbe, ha alkalmazzuk a következő mátrix műveletet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u^e(\xi,\zeta) \\ v^e(\xi,\zeta) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{u}}^e(\xi,\zeta)} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 \\ 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{H}}(\xi,\zeta)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{q}}^e}$$

(2×1) (2×8) (8×1)

Vagy röviden

$$\boxed{\underline{\underline{u}}^e(\xi,\zeta) = \underline{\underline{H}}(\xi,\zeta)\,\underline{\underline{q}}^e}$$

A $\underline{\underline{q}}^e$-t az e-edik végeselem csomóponti elmozdulás vektorának nevezzük.

A $\underline{\underline{q}}^e$ elemeit, a csomóponti elmozdulás paramétereket nem ismerjük. A cél ezeknek a paramétereknek a meghatározása.

A virtuális elmozdulást nem akarjuk meghatározni, de felírására a további számítások elvégzéséhez szükség van.

$$\boxed{\delta\underline{\underline{u}}^e(\xi,\zeta) = \underline{\underline{H}}(\xi,\zeta)\,\delta\underline{\underline{q}}^e}$$

A gyenge alak egy végeselemen történő kiszámításához szükséges még az $\underline{\underline{\varepsilon}}$ meghatározása is.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi,\zeta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^e(\xi,\zeta) \\ \varepsilon_y^e(\xi,\zeta) \\ \gamma_{xy}^e(\xi,\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u^e(\xi,\zeta)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v^e(\xi,\zeta)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u^e(\xi,\zeta)}{\partial y} + \dfrac{\partial v^e(\xi,\zeta)}{\partial x} \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\partial}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u^e(\xi,\zeta) \\ v^e(\xi,\zeta) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{u}}^e(\xi,\zeta)} = \underline{\underline{\partial}}\,\underline{\underline{u}}^e(\xi,\zeta) = \underbrace{\underline{\underline{\partial}}\,\underline{\underline{H}}(\xi,\zeta)}_{\underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta)}\,\underline{q}^e$$

(3×2) $\quad$ (2×1)

azaz

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi,\zeta) = \underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta)\,\underline{q}^e}$$

$$\underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 \\ 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) & 0 & h_1(\xi,\zeta) \end{bmatrix} =$$

(3×2) $\quad$ (2×8)

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1(\xi,\zeta)}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial h_2(\xi,\zeta)}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial h_3(\xi,\zeta)}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial h_4(\xi,\zeta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial h_1(\xi,\zeta)}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial h_2(\xi,\zeta)}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial h_3(\xi,\zeta)}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial h_4(\xi,\zeta)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h_1(\xi,\zeta)}{\partial y} & \dfrac{\partial h_1(\xi,\zeta)}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2(\xi,\zeta)}{\partial y} & \dfrac{\partial h_2(\xi,\zeta)}{\partial x} & \dfrac{\partial h_3(\xi,\zeta)}{\partial y} & \dfrac{\partial h_3(\xi,\zeta)}{\partial x} & \dfrac{\partial h_4(\xi,\zeta)}{\partial y} & \dfrac{\partial h_4(\xi,\zeta)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Probléma: a $h_i(\xi,\zeta)$ függvények változói a ξ és ζ koordináták, azonban az x és y szerint kell őket deriválni.

Megoldás: közvetett függvény deriválási szabálya:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial h_i}{\partial x} &= \frac{\partial h_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial h_i}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\\ \frac{\partial h_i}{\partial y} &= \frac{\partial h_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial h_i}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$

Ez felírható tömörebben mátrixokkal.

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial h_i}{\partial x}\\ \frac{\partial h_i}{\partial y}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x}\\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y}\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}^{-1}(\xi,\zeta)} \begin{bmatrix}\frac{\partial h_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial h_i}{\partial \zeta}\end{bmatrix}$$

ahol $\boxed{\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta}\end{bmatrix}}$ a <u>Jacobi-mátrix</u>, és

$$\underline{\underline{J}}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x}\\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y}\end{bmatrix}$$ pedig az inverze.

A Jacobi-mátrix elemeit a csomóponti koordináták ismeretében meg tudjuk határozni.

$$\boxed{\underline{\underline{J}}(\xi,\zeta) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial h_i(\xi,\zeta)}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial h_i(\xi,\zeta)}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial h_i(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial h_i(\xi,\zeta)}{\partial \zeta} y_i \end{bmatrix}}$$

(mert az $x = x(\xi,\zeta)$ és $y = y(\xi,\zeta)$ ismert)

A számítás menete:

1. A $\underline{\underline{J}}$ kiszámítása egy konkrét $\xi\,\zeta$ koordináta párosra.
2. A $\underline{\underline{J}}$, mint 2x2-es méretű, számokat tartalmazó mátrix invertálása.
3. A $\begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{bmatrix}$ meghatározása konkrét ξ és ζ értékekre.
4. A $\underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta)$ feltöltése a $\frac{\partial h_i}{\partial x}$ és $\frac{\partial h_i}{\partial y}$ elemekkel.

$$\Downarrow$$

A $\underline{\underline{B}}^e$ mátrixot csak konkrét ξ és ζ számértékek megadása után tudjuk felírni!

Ennek mintájára a virtuális alakváltozás is felírható

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi,\zeta) = \underline{\underline{\partial}}\, \delta \underline{\underline{u}}^e(\xi,\zeta) = \underline{\underline{\partial}}\, \underline{\underline{H}}(\xi,\zeta)\, \delta \underline{q}^e = \underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta)\, \delta \underline{q}^e$$

vagyis

$$\boxed{\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi,\zeta) = \underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta)\, \delta \underline{q}^e}$$

Feszültség állapot egy végeselemen

$$\underline{\underline{\sigma}}^e(\xi,\zeta) = \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\xi,\zeta) = \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta)\, \underline{q}^e$$

Vagyis

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}^e(\xi,\zeta) = \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta)\, \underline{q}^e}$$

Helyettesítsük be a gyenge alakba

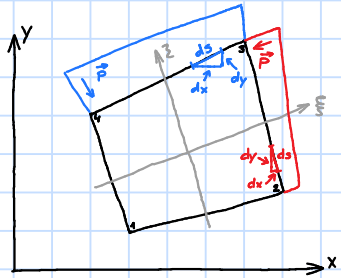
Egy végeselemre:

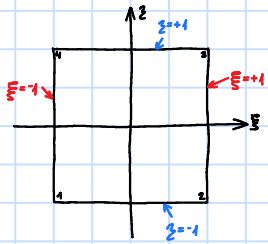
$$\int_{(V^e)} (\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^e)^T \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e \, dV - \int_{(A_p^e)} (\delta \underline{u}^e)^T \underline{p}_0 \, dA - \int_{(V^e)} (\delta \underline{u}^e) \underline{f}_0 \, dV =$$

$$= \int_{(V^e)} (\delta \underline{q}^e)^T \left(\underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta)\right)^T \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta)\, \underline{q}^e \underbrace{dV}_{1\cdot \det(\underline{\underline{J}}(\xi,\zeta))\, d\xi\, d\zeta} - \int_{(A_p^e)} (\delta \underline{q}^e)^T \underline{\underline{H}}(\xi,\zeta)\, \underline{p}_0 \underbrace{dA}_{?} -$$

$$- \int_{(V^e)} (\delta \underline{q}^e)^T \underline{\underline{H}}(\xi,\zeta)\, \underline{f}_0 \, dV$$

Az A_p^e felületre számított integrálnál a dA azt az elemi felületet jelenti, amelyen felületi terhelés hat a végeselemre.





$$dA = 1 \cdot ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \underbrace{d\zeta}_{0}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \underbrace{d\zeta}_{0}$$

Ha ζ = állandó $\Rightarrow d\zeta = 0$

Így

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi\right)^2} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\partial x(\xi, \zeta = \pm 1)}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial y(\xi, \zeta = \pm 1)}{\partial \xi}\right)^2}}_{J_A(\xi)} d\xi$$

$$dA = 1 \cdot ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} \underbrace{d\xi}_{0} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} \underbrace{d\xi}_{0} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta$$

Ha ξ = állandó $\Rightarrow d\xi = 0$

Így

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta\right)^2} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\partial x(\xi = \pm 1, \zeta)}{\partial \zeta}\right) + \left(\frac{\partial y(\xi = \pm 1, \zeta)}{\partial \zeta}\right)^2}}_{J_A(\zeta)} d\zeta$$

Attól függően, hogy a végeselem melyik oldalélen van a terhelés a ξ és ζ értékének -1-et vagy $+1$-et kell választani.

A gyenge alak egy végesdemre így irható (ha a felületi terhelés például a 3. és 4. csomópont között helyezkedik el).

$$(\delta \underline{q}^e)^T \Bigg[\underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta)\right)^T \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{B}}^e(\xi,\eta) \det\left(\underline{\underline{J}}^e(\xi,\eta)\right) d\xi\, d\eta}_{\underline{\underline{K}}^e} \underline{q}^e +$$

$$+ \underbrace{\int_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{H}}(\xi,\eta=1)\right)^T \underline{p}_0(\xi,\eta=1) J_1^e(\xi,\eta=1)\, d\xi}_{\underline{f}_p^e} +$$

$$+ \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{H}}(\xi,\eta)\right)^T \underline{f}_0(\xi,\eta) \det\left(\underline{\underline{J}}^e(\xi,\eta)\right) d\xi\, d\eta}_{\underline{f}_f^e} \Bigg] =$$

$$= (\delta \underline{q}^e)^T \Big(\underline{\underline{K}}^e \underline{q}^e + \underbrace{\underline{f}_p^e + \underline{f}_f^e}_{\underline{f}^e} \Big)$$

ahol

$\underline{\underline{K}}^e$ a végeselem merevségi mátrixa

$\underline{f}_p^e$ a végesdemre a felületi terhelésekből adódó tehervektor

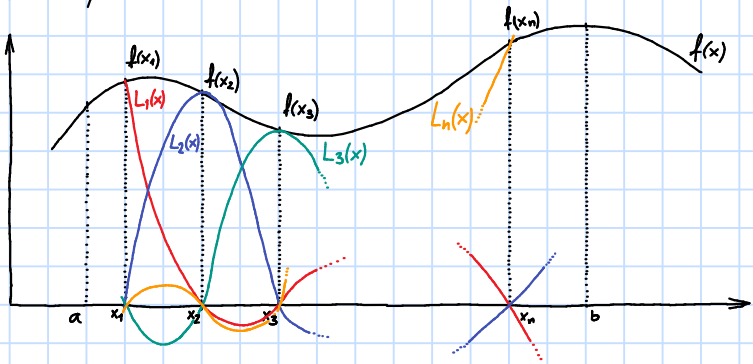
$\underline{f}_f^e$ a végeselemre a térfogati terhelésekből adódó tehervektor

$\underline{f}^e$ a végesdem tehervektora

Ezeknek a mennyiségeknek a kiszámításához minden adatot ismerünk.

Numerikus integrálás: Gauss-kvadratúra

Az integrálni kívánt függvényt Lagrange-polinomokkal közelítjük.



$$f(x) \approx f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) + \dots + f(x_n)L_n(x)$$

ahol

$$\left.\begin{aligned}
L_1(x) &\approx \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} \\
L_2(x) &\approx \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} \\
L_3(x) &\approx \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)\cdots(x_3-x_n)} \\
L_n(x) &\approx \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}\right\} \quad L_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f(x_i)L_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\underbrace{\int_a^b L_i(x)\,dx}_{W_i}$$

A integrálás pontossága függ az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontok megválasztásától.

Bizonyítható, hogy ha

- az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontok az n-ed fokú Legendre-polinom gyökhelyei, valamint
- $a = -1$ és $b = 1$

akkor az integrálra a lehető legjobb közelítést kapjuk.

Ha az integrandusz $2n-1$-ed, vagy annál kisebb fokú polinom, akkor a közelítő érték megegyezik az egzakt megoldással!

Ekkor a közelítő integrálási eljárást Gauss-kvadratúrának nevezzük. Az

x_i – a Gauss-pontokat,

W_i – a Gauss (vagy integrálási) súlyokat jelentik.

Egyváltozós függvényeknél

$$\int_{-1}^{1} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, W_i$$

Kétváltozós függvényeknél

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_j)\; W_i\, W_j$$

Háromváltozós függvényeknél

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_i,y_j,z_k)\; W_i\, W_j\, W_k$$

Példák:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta)\right)^T \underline{\underline{D}}\; \underline{\underline{B}}^e(\xi,\zeta)\, \det\left(\underline{\underline{J}}^e(\xi,\zeta)\right) d\xi\, d\zeta =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\underline{\underline{B}}^e(\xi_i,\zeta_j)\right)^T \underline{\underline{D}}\; \underline{\underline{B}}^e(\xi_i,\zeta_j)\, \det\left(\underline{\underline{J}}^e(\xi_i,\zeta_j)\right) W_i\, W_j$$

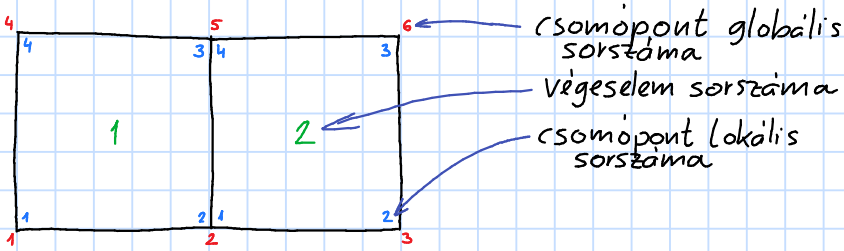
$$\underline{f}_P^e = \int_{(A_P^e)} \left(\underline{\underline{H}}(\xi,\zeta=1)\right)^T \underline{p}_0(\xi,\zeta=1)\, J_A^e(\xi,\zeta=1)\, d\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{\underline{H}}(\xi_i,\zeta=1)\right)^T \underline{p}_0(\xi_i,\zeta=1)\, J_A^e(\xi_i,\zeta=1)\; W_i$$

$$\underline{f}_t^e = \int_{-1}^{1} \left(\underline{\underline{H}}(\xi,\zeta)\right)^T \underline{t}_0(\xi,\zeta)\, \det\left(\underline{\underline{J}}^e(\xi,\zeta)\right) d\xi\, d\zeta =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\underline{\underline{H}}(\xi_i,\zeta_j)\right)^T \underline{t}_0(\xi_i,\zeta_j)\, \det\left(\underline{\underline{J}}^e(\xi_i,\zeta_j)\right) W_i\, W_j$$

Szerkezet merevségi mátrixa



Kapcsolat a csomópontok lokális (elemhez kötött) és globális sorszámozása között

Lokális cs.p. sorszám

v.elem sorsz	1	2	3	4
1	1	2	5	4
2	2	3	6	5

A rugalmasságtani peremérték feladat gyenge alakja a fenti szerkezetre:

$$\sum_{e=1}^{2}(\delta \underline{q}^e)^T(\underline{\underline{K}}^e \underline{q}^e - \underline{f}^e) = 0 = (\delta \underline{q}^1)^T(\underline{\underline{K}}^1 \underline{q}^1 - \underline{f}^1) + (\delta \underline{q}^2)^T(\underline{\underline{K}}^2 \underline{q}^2 - \underline{f}^2)$$

Ugyan ez részletesen felírva:

$$
\begin{bmatrix} \delta u_1^1 & \delta v_1^1 & \delta u_2^1 & \delta v_2^1 & \delta u_3^1 & \delta v_3^1 & \delta u_4^1 & \delta v_4^1 \end{bmatrix}
\left(\begin{bmatrix}
K^1_{11xx} & K^1_{11xy} & K^1_{12xx} & K^1_{12xy} & K^1_{13xx} & \cdots & & K^1_{14xy} \\
K^1_{11yx} & K^1_{11yy} & K^1_{12yx} & K^1_{12yy} & & & & \vdots \\
K^1_{21xx} & K^1_{21xy} & K^1_{22xx} & & & & & \vdots \\
K^1_{21yx} & K^1_{21yy} & & \ddots & & & & K^1_{24yy} \\
K^1_{31xx} & & & & \ddots & & K^1_{34xy} & K^1_{34xy} \\
\vdots & & & & & K^1_{33yy} & K^1_{34yx} & K^1_{34yy} \\
\vdots & & & & K^1_{43xx} & K^1_{43xy} & K^1_{44xx} & K^1_{44xy} \\
K^1_{44yx} & \cdots & & K^1_{43yy} & K^1_{43yx} & K^1_{43yy} & K^1_{44yx} & K^1_{44yy}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ v_2^1 \\ u_3^1 \\ v_3^1 \\ u_4^1 \\ v_4^1 \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} f_{x_1}^1 \\ f_{y_1}^1 \\ f_{x_2}^1 \\ f_{y_2}^1 \\ f_{x_3}^1 \\ f_{y_3}^1 \\ f_{x_4}^1 \\ f_{y_4}^1 \end{bmatrix}
\right) +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \delta u_1^2 & \delta v_1^2 & \delta u_2^2 & \delta v_2^2 & \delta u_3^2 & \delta v_3^2 & \delta u_4^2 & \delta v_4^2 \end{bmatrix}
\left(\begin{bmatrix}
K^2_{11xx} & K^2_{11xy} & K^2_{12xx} & K^2_{12xy} & K^2_{13xx} & \cdots & & K^2_{14xy} \\
K^2_{11yx} & K^2_{11yy} & K^2_{12yx} & K^2_{12yy} & & & & \vdots \\
K^2_{21xx} & K^2_{21xy} & K^2_{22xx} & & & & & \vdots \\
K^2_{21yx} & K^2_{21yy} & & \ddots & & & & K^2_{24yy} \\
K^2_{31xx} & & & & \ddots & & K^2_{34xy} & K^2_{34xy} \\
\vdots & & & & & K^2_{33yy} & K^2_{34yx} & K^2_{34yy} \\
\vdots & & & & K^2_{43xx} & K^2_{43xy} & K^2_{44xx} & K^2_{44xy} \\
K^2_{44yx} & \cdots & & K^2_{43yy} & K^2_{43yx} & K^2_{43yy} & K^2_{44yx} & K^2_{44yy}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1^2 \\ v_1^2 \\ u_2^2 \\ v_2^2 \\ u_3^2 \\ v_3^2 \\ u_4^2 \\ v_4^2 \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} f_{x_1}^2 \\ f_{y_1}^2 \\ f_{x_2}^2 \\ f_{y_2}^2 \\ f_{x_3}^2 \\ f_{y_3}^2 \\ f_{x_4}^2 \\ f_{y_4}^2 \end{bmatrix}
\right) = 0
$$

Térjünk át a csomópontok lokális sorszámozásáról a globális sorszámozásra. (Egy csomóponthoz csak egy elmozdulás tartozhat, de akár több merevség is, amik majd összeadódnak.)

$$
\begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta v_1 & \delta u_2 & \delta v_2 & \delta u_5 & \delta v_5 & \delta u_4 & \delta v_4 \end{bmatrix}
\left(\begin{bmatrix}
K^1_{11xx} & K^1_{11xy} & K^1_{12xx} & K^1_{12xy} & K^1_{15xx} & \cdots & & K^1_{14xy} \\
K^1_{11yx} & K^1_{11yy} & K^1_{12yx} & K^1_{12yy} & & & & \vdots \\
K^1_{21xx} & K^1_{21xy} & K^1_{22xx} & & & & & \vdots \\
K^1_{21yx} & K^1_{21yy} & & \ddots & & & & K^1_{24yy} \\
K^1_{51xx} & & & & \ddots & & K^1_{51xy} & K^1_{54xy} \\
\vdots & & & & & K^1_{55yy} & K^1_{54yx} & K^1_{54yy} \\
\vdots & & & & K^1_{45xx} & K^1_{45xy} & K^1_{44xx} & K^1_{44xy} \\
K^1_{41yx} & \cdots & & K^1_{42yy} & K^1_{45yx} & K^1_{45yy} & K^1_{44yx} & K^1_{44yy}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}
- \begin{bmatrix} f^1_{x1} \\ f^1_{y1} \\ f^1_{x2} \\ f^1_{y2} \\ f^1_{x5} \\ f^1_{y5} \\ f^1_{x4} \\ f^1_{y4} \end{bmatrix} \right) +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \delta u_2 & \delta v_2 & \delta u_3 & \delta v_3 & \delta u_6 & \delta v_6 & \delta u_5 & \delta v_5 \end{bmatrix}
\left(\begin{bmatrix}
K^2_{22xx} & K^2_{22xy} & K^2_{23xx} & K^2_{23xy} & K^2_{26xx} & \cdots & & K^2_{25xy} \\
K^2_{22yx} & K^2_{22yy} & K^2_{23yx} & K^2_{23yy} & & & & \vdots \\
K^2_{32xx} & K^2_{32xy} & K^2_{33xx} & & & & & \vdots \\
K^2_{32yx} & K^2_{32yy} & & \ddots & & & & K^2_{35yy} \\
K^2_{62xx} & & & & \ddots & & K^2_{65xy} & K^2_{65xy} \\
\vdots & & & & & K^2_{66yy} & K^2_{65yx} & K^2_{65yy} \\
\vdots & & & & K^2_{56xx} & K^2_{56xy} & K^2_{55xx} & K^2_{55xy} \\
K^2_{52yx} & \cdots & & K^2_{53yy} & K^2_{56yx} & K^2_{56yy} & K^2_{55yx} & K^2_{55yy}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix}
- \begin{bmatrix} f^2_{x2} \\ f^2_{y2} \\ f^2_{x3} \\ f^2_{y3} \\ f^2_{x6} \\ f^2_{y6} \\ f^2_{x5} \\ f^2_{y5} \end{bmatrix} \right) = 0
$$

Most állítsuk sorrendbe az elmozdulás koordinátákat a globális sorszámok alapján. (Ez a merevségi mátrixban sor és oszlop cserékkel jár, hogy a végeredmény ne változzon.)

$$
\begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta v_1 & \delta u_2 & \delta v_2 & \delta u_4 & \delta v_4 & \delta u_5 & \delta v_5 \end{bmatrix}
\left(\begin{bmatrix}
K^1_{11xx} & K^1_{11xy} & K^1_{12xx} & K^1_{12xy} & K^1_{14xx} & \cdots & & K^1_{15xy} \\
K^1_{11yx} & K^1_{11yy} & K^1_{12yx} & K^1_{12yy} & & & & \vdots \\
K^1_{21xx} & K^1_{21xy} & K^1_{22xx} & & & & & \vdots \\
K^1_{21yx} & K^1_{21yy} & & \ddots & & & & K^1_{25yy} \\
K^1_{41xx} & & & & \ddots & & K^1_{45xx} & K^1_{45xy} \\
\vdots & & & & & K^1_{44yy} & K^1_{45yx} & K^1_{45yy} \\
\vdots & & & & K^1_{54xx} & K^1_{54xy} & K^1_{55xx} & K^1_{55xy} \\
K^1_{51yx} & \cdots & & K^1_{52yy} & K^1_{52yx} & K^1_{54yy} & K^1_{55yx} & K^1_{55yy}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} f^1_{x1} \\ f^1_{y1} \\ f^1_{x2} \\ f^1_{y2} \\ f^1_{x4} \\ f^1_{y4} \\ f^1_{x5} \\ f^1_{y5} \end{bmatrix}
\right) +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \delta u_2 & \delta v_2 & \delta u_3 & \delta v_3 & \delta u_5 & \delta v_5 & \delta u_6 & \delta v_6 \end{bmatrix}
\left(\begin{bmatrix}
K^2_{22xx} & K^2_{22xy} & K^2_{23xx} & K^2_{23xy} & K^2_{25xx} & \cdots & & K^2_{26xy} \\
K^2_{22yx} & K^2_{22yy} & K^2_{23yx} & K^2_{23yy} & & & & \vdots \\
K^2_{32xx} & K^2_{32xy} & K^2_{33xx} & & & & & \vdots \\
K^2_{32yx} & K^2_{32yy} & & \ddots & & & & K^2_{36yy} \\
K^2_{52xx} & & & & \ddots & & K^2_{56xx} & K^2_{56xy} \\
\vdots & & & & & K^2_{55yy} & K^2_{56yx} & K^2_{56yy} \\
\vdots & & & & K^2_{65xx} & K^2_{65xy} & K^2_{66xx} & K^2_{66xy} \\
K^2_{62yx} & \cdots & & K^2_{63yy} & K^2_{65yx} & K^2_{65yy} & K^2_{66yx} & K^2_{66yy}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} f^2_{x2} \\ f^2_{y2} \\ f^2_{x3} \\ f^2_{y3} \\ f^2_{x5} \\ f^2_{y5} \\ f^2_{x6} \\ f^2_{y6} \end{bmatrix}
\right) = 0
$$

Egészítsük ki a csomóponti elmozdulás vektorokat a hiányzó elemekkel, és töltsük fel a merevségi mátrixokat és tehervektorokat nullákkal úgy, az egyenlet ekvivalens maradjon az előzővel.

$$
\begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta v_1 & \delta u_2 & \delta v_2 & \delta u_3 & \delta v_3 & \delta u_4 & \delta v_4 & \delta u_5 & \delta v_5 & \delta u_6 & \delta v_6 \end{bmatrix}
\left(\begin{bmatrix}
K^1_{11xx} & K^1_{11xy} & K^1_{12xx} & K^1_{12xy} & 0 & 0 & K^1_{14xx} & \cdots & & K^1_{15xy} & 0 & 0 \\
K^1_{11yx} & K^1_{11yy} & K^1_{12yx} & K^1_{12yy} & 0 & 0 & & \ddots & & \vdots & 0 & 0 \\
K^1_{21xx} & K^1_{21xy} & K^1_{22xx} & & 0 & 0 & & & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\
K^1_{21yx} & K^1_{21yy} & & \ddots & 0 & 0 & & & & K^1_{25yy} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
K^1_{41xx} & & & & 0 & 0 & \ddots & & K^1_{45xx} & K^1_{45xy} & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & & & 0 & 0 & & K^1_{44yy} & K^1_{45yx} & K^1_{45yy} & 0 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & 0 & 0 & K^1_{54xx} & K^1_{54xy} & K^1_{55xx} & K^1_{55xy} & 0 & 0 \\
K^1_{51yx} & \cdots & & K^1_{52yy} & 0 & 0 & K^1_{54yx} & K^1_{54yy} & K^1_{55yx} & K^1_{55yy} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix}
- \begin{bmatrix} f^1_{x1} \\ f^1_{y1} \\ f^1_{x2} \\ f^1_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ f^1_{x4} \\ f^1_{y4} \\ f^1_{x5} \\ f^1_{y5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\right) +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta v_1 & \delta u_2 & \delta v_2 & \delta u_3 & \delta v_3 & \delta u_4 & \delta v_4 & \delta u_5 & \delta v_5 & \delta u_6 & \delta v_6 \end{bmatrix}
\left(\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K^2_{22xx} & K^2_{22xy} & K^2_{23xx} & K^2_{23xy} & 0 & 0 & K^2_{25xx} & \cdots & & K^2_{26xy} \\
0 & 0 & K^2_{22yx} & K^2_{22yy} & K^2_{23yx} & K^2_{23yx} & 0 & 0 & & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & K^2_{32xx} & K^2_{32xy} & K^2_{33xx} & & 0 & 0 & & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & K^2_{32yx} & K^2_{33yy} & & \ddots & 0 & 0 & & & & K^2_{36yy} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K^2_{52xx} & & & & 0 & 0 & \ddots & & K^2_{56xx} & K^2_{56xy} \\
0 & 0 & \vdots & \ddots & & & 0 & 0 & & K^2_{55yy} & K^2_{56yx} & K^2_{56yy} \\
0 & 0 & \vdots & & \ddots & & 0 & 0 & K^2_{65xx} & K^2_{65yy} & K^2_{66xx} & K^2_{66xy} \\
0 & 0 & K^2_{62yx} & \cdots & & K^2_{63yy} & 0 & 0 & K^2_{65yx} & K^2_{65yy} & K^2_{66yx} & K^2_{66yy}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix}
- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f^2_{x2} \\ f^2_{y2} \\ f^2_{x3} \\ f^2_{y3} \\ 0 \\ 0 \\ f^2_{x5} \\ f^2_{y5} \\ f^2_{x6} \\ f^2_{y6} \end{bmatrix}
\right) = 0
$$

Emeljük ki a csomóponti elmozdulásvektorokat, a merevségi mátrixokat és tehervektorokat pedig adjuk össze.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\delta u_1 & \delta v_1 & \delta u_2 & \delta v_2 & \delta u_3 & \delta v_3 & \delta u_4 & \delta v_4 & \delta u_5 & \delta v_5 & \delta u_6 & \delta v_6\end{bmatrix}}_{\delta \underline{q}^T}$$

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix}
K^1_{11xx} & K^1_{11xy} & K^1_{12xx} & K^1_{12xy} & 0 & 0 & K^1_{14xx} & K^1_{14xy} & K^1_{15xx} & K^1_{15xy} & 0 & 0 \\
K^1_{11yx} & K^1_{11yy} & K^1_{12yx} & K^1_{12yy} & 0 & 0 & K^1_{14yx} & K^1_{14yy} & K^1_{15yx} & K^1_{15yy} & 0 & 0 \\
K^1_{21xx} & K^1_{21xy} & (K^1_{22xx}+K^2_{22xx}) & (K^1_{22xy}+K^2_{22xy}) & K^2_{23xx} & K^2_{23xy} & K^1_{24xx} & K^1_{24xy} & (K^1_{25xx}+K^2_{25xx}) & (K^1_{25xy}+K^2_{25xy}) & K^2_{26xx} & K^2_{26xy} \\
K^1_{21yx} & K^1_{21yy} & (K^1_{22yx}+K^2_{22yx}) & (K^1_{22yy}+K^2_{22yy}) & K^2_{23yx} & K^2_{23yy} & K^1_{24yx} & K^1_{24yy} & (K^1_{25yx}+K^2_{25yx}) & (K^1_{25yy}+K^2_{25yy}) & K^2_{26yx} & K^2_{26yy} \\
0 & 0 & K^2_{32xx} & K^2_{32xy} & K^2_{33xx} & K^2_{33xy} & 0 & 0 & K^2_{35xx} & K^2_{35xy} & K^2_{36xx} & K^2_{36xy} \\
0 & 0 & K^2_{32yx} & K^2_{32yy} & K^2_{33yx} & K^2_{33yy} & 0 & 0 & K^2_{35yx} & K^2_{35yy} & K^2_{36yx} & K^2_{36yy} \\
K^1_{41xx} & K^1_{41yx} & K^1_{42xx} & K^1_{42xy} & 0 & 0 & K^1_{44xx} & K^1_{44xy} & K^1_{45xx} & K^1_{45xy} & 0 & 0 \\
K^1_{41xy} & K^1_{41yy} & K^1_{42yx} & K^1_{42yy} & 0 & 0 & K^1_{44yx} & K^1_{44yy} & K^1_{45yx} & K^1_{45yy} & 0 & 0 \\
K^2_{51xx} & K^2_{51xy} & (K^1_{52xx}+K^2_{52xx}) & (K^1_{52xy}+K^2_{52xy}) & K^2_{53xx} & K^2_{53xy} & K^1_{54xx} & K^1_{54xy} & (K^1_{55xx}+K^2_{55xx}) & (K^1_{55xy}+K^2_{55xy}) & K^2_{56xx} & K^2_{56xy} \\
K^2_{51yx} & K^2_{51yy} & (K^1_{52yx}+K^2_{52yx}) & (K^1_{52yy}+K^2_{52yy}) & K^2_{53yx} & K^2_{53yy} & K^1_{54yx} & K^1_{54yy} & (K^1_{55yx}+K^2_{55yx}) & (K^1_{55yy}+K^2_{55yy}) & K^2_{56yx} & K^2_{56yy} \\
0 & 0 & K^2_{62xx} & K^2_{62xy} & K^2_{63xx} & K^2_{63xy} & 0 & 0 & K^2_{65xx} & K^2_{65xy} & K^2_{66xx} & K^2_{66xy} \\
0 & 0 & K^2_{62yx} & K^2_{62yy} & K^2_{63yx} & K^2_{63yy} & 0 & 0 & K^2_{65yx} & K^2_{65yy} & K^2_{66yx} & K^2_{66yy}
\end{bmatrix}}_{\underline{K}}
\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix}}_{\underline{q}}
-
\underbrace{\begin{bmatrix} f^1_{x1} \\ f^1_{y1} \\ f^1_{x2} \; f^2_{x2} \\ f^1_{y2} \; f^2_{y2} \\ f^2_{x3} \\ f^2_{y3} \\ f^1_{x4} \\ f^1_{y4} \\ f^1_{x5} \; f^2_{x5} \\ f^1_{y5} \; f^2_{y5} \\ f^2_{x6} \\ f^2_{y6} \end{bmatrix}}_{\underline{f}}
\right) = 0$$

A két végeselem merevségi mátrixának összeadását szemlélteti az alábbi ábra:

$\underline{K} =$